

Methoden zur Glättung der Hüllkurve von OFDM-Signalen

Harald Zottmann

30. August 1994

Inhaltsverzeichnis

1	Ansatz mit einem FM-Signal im Bandpaßsystem	2
1.1	Bestimmung der OFDM-Koeffizienten	2
1.2	Lösung des linearen Gleichungssystems	6
2	Ansatz mit einem FM-Signal im komplexen Basisband	8
2.1	Bestimmung der OFDM-Koeffizienten	8
2.2	Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems	10
2.2.1	Das SOR-Newton-Verfahren	11
2.2.2	Der Great Deluge Algorithm (GDA)	12
2.3	Linearisierung des Gleichungssystems	13
2.4	Beispiel zum FM-Signal im komplexen Basisband	15
3	Ansatz mit einem FM-Signal bei stetigem Phasenverlauf	16
3.1	Bestimmung der OFDM-Koeffizienten	16
3.2	Beispiel zum FM-Signal mit stetigem Phasenverlauf	19
4	Ansatz mit einem abgetasteten FM-Signal	20
4.1	Bestimmung der OFDM-Koeffizienten	20
4.2	Beispiel zum abgetasteten FM-Signal	23

1 Ansatz mit einem FM-Signal im Bandpaßsystem

1.1 Bestimmung der OFDM-Koeffizienten

Ein FM-moduliertes Signal erfüllt die zu stellende Forderung nach einer konstanten Hüllkurve. Als Ausgangspunkt wird somit ein solches Signal in Hochfrequenzlage gewählt:

$$s(t) = A \cdot \cos \varphi(t) \cdot r_T(t) \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = \sum_{i=0}^{M-1} \varphi_i \cdot r_{\frac{T}{M}} \left(t - i \frac{T}{M} \right) \quad (1)$$

Zur leichteren Auswertung des Ausdrucks wurde der Gesamtphasenwinkel $\varphi(t)$ als stückweise konstant definiert. Dieses Signal wird durch eine Fourier-Reihenentwicklung nach den OFDM-Trägerfrequenzen dargestellt:

$$s(t) = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} c_{\mu} \cdot e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} + \overbrace{\sum_{\mu \ni \text{OFDM}} c_{\mu} \cdot e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}}^{\text{Restglied=Approximationsfehler}} \quad (2)$$

Für reelle Funktionen $s(t)$ gilt:

$$c_{\mu} = c_{-\mu}^* \quad (3)$$

Zusammen mit den Beziehungen:

$$c_{\mu} = a_{\mu} + jb_{\mu} \quad \text{mit} \quad a_{\mu} = \Re\{c_{\mu}\} \quad \text{und} \quad b_{\mu} = \Im\{c_{\mu}\} \quad (4)$$

$$e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} = \cos \mu \frac{2\pi}{T} t + j \sin \mu \frac{2\pi}{T} t \quad (5)$$

erhält man dann für:

$$s(t) = \sum_{\mu < 0} c_{\mu} \cdot e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{\mu > 0} c_{\mu} \cdot e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \quad \mu \in \text{OFDM} \quad (6)$$

die Gleichung:

$$s(t) = \sum_{\mu > 0} (a_{\mu} - jb_{\mu}) \cdot \left(\cos \mu \frac{2\pi}{T} t - j \sin \mu \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (7)$$

$$+ \sum_{\mu > 0} (a_{\mu} + jb_{\mu}) \cdot \left(\cos \mu \frac{2\pi}{T} t + j \sin \mu \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (8)$$

Zusammenfassen der Terme führt schließlich auf:

$$s(t) = \sum_{\mu > 0} 2\Re\{c_\mu\} \cos \mu \frac{2\pi}{T} t - 2\Im\{c_\mu\} \sin \mu \frac{2\pi}{T} t \quad (9)$$

Die Gleichung des OFDM-Signals lautet dagegen:

$$s_{ofdm}(t) = \sum_{\mu > 0} A_\mu \cos \mu \frac{2\pi}{T} t + B_\mu \sin \mu \frac{2\pi}{T} t \quad (10)$$

Für die komplexen Fourier-Koeffizienten gilt:

$$c_\mu = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (11)$$

Einsetzen von $s(t)$ in die Gleichung zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \int_0^T \cos \left(\sum_{i=0}^{M-1} \varphi_i \cdot r \frac{T}{M} \left(t - i \frac{T}{M} \right) \right) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (12)$$

Vertauschen von Integration und Summation sowie Auswerten der Rechteckfunktion liefert:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \int_{i \frac{T}{M}}^{(i+1) \frac{T}{M}} \underbrace{\cos \varphi_i}_{\alpha_i} \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (13)$$

Auswerten des Integrals:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot \left[\frac{1}{-j\mu \frac{2\pi}{T}} e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right]_{i \frac{T}{M}}^{(i+1) \frac{T}{M}} \quad (14)$$

Einsetzen der Grenzen liefert:

$$c_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot \frac{e^{-j2\pi \frac{\mu}{M} (i+1)} - e^{-j2\pi \frac{\mu}{M} i}}{-j2\pi\mu} \quad (15)$$

Zurückführung der Exponentialfunktionen auf eine si-Funktion:

$$c_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot e^{-j2\pi \frac{\mu}{M} (i+\frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{e^{+j\pi \frac{\mu}{M}} - e^{-j\pi \frac{\mu}{M}}}{j2\pi\mu} \right) \quad (16)$$

$$c_\mu = A \cdot \frac{\sin \left(\pi \frac{\mu}{M} \right)}{\pi\mu} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot e^{-j2\pi \frac{\mu}{M} (i+\frac{1}{2})} \quad (17)$$

$$c_\mu = \frac{A}{M} \cdot \text{si} \left(\pi \frac{\mu}{M} \right) \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot e^{-j2\pi \frac{\mu}{M} (i+\frac{1}{2})} \quad (18)$$

Aufspalten von c_μ nach Realanteil und Imaginäranteil:

$$\Re \quad a_\mu = \frac{A}{M} \cdot \text{si} \left(\pi \frac{\mu}{M} \right) \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot \cos \left(2\pi \frac{\mu}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right) \quad \forall \mu \quad (19)$$

$$\Im \quad b_\mu = \frac{-A}{M} \cdot \text{si} \left(\pi \frac{\mu}{M} \right) \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot \sin \left(2\pi \frac{\mu}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right) \quad \forall \mu \quad (20)$$

Zur Entwicklung des OFDM-Signals nach einem FM-Signal müssen die OFDM-Parameter A_μ und B_μ möglichst gut mit den Koeffizienten der Fourier-Reihenentwicklung a_μ und b_μ übereinstimmen. Es soll nun zunächst der Fall betrachtet werden, bei dem die Normalkomponente des OFDM-Signals A_μ ein beliebiges Nutzsignal trägt, und die Quadraturkomponente B_μ entsprechend zur Hüllkurvenstabilisation berechnet wird. Somit ist folgende Kostenfunktion Q zu minimieren:

$$Q(\alpha_i) = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} (A_\mu - a_\mu)^2 \rightarrow \min \quad (21)$$

Hierzu muß folgender Ansatz erfüllt werden:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (22)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_\mu - a_\mu)^2 \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 2 \cdot \sum_{\mu \in \text{OFDM}} (A_\mu - a_\mu) \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial \alpha_i} \quad (24)$$

Nachdifferenzieren von a_μ liefert:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 2A \cdot \sum_{\mu \in \text{OFDM}} (A_\mu - a_\mu) \cdot \underbrace{\frac{1}{M} \cdot \cos \left(2\pi \frac{\mu}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right) \cdot \text{si} \left(\pi \frac{\mu}{M} \right)}_{K(i, \mu)} \quad (25)$$

Zusammenfassen von $K(i, \mu)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 2A \cdot \sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot (A_\mu - a_\mu) \quad (26)$$

Einsetzen von a_μ :

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 2A \cdot \sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \quad (27)$$

$$\cdot \left(A_\mu - A \cdot \sum_{l=0}^{M-1} \alpha_l \cdot \underbrace{\frac{1}{M} \cdot \cos\left(2\pi \frac{\mu}{M} \left(l + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \text{si}\left(\pi \frac{\mu}{M}\right)}_{K(l, \mu)} \right)$$

Zusammenfassen von $K(l, \mu)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 2A \cdot \sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot \left(A_\mu - A \cdot \sum_{l=0}^{M-1} K(l, \mu) \cdot \alpha_l \right) \quad (28)$$

Umformen und Sortieren der Gleichung:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 2A \cdot \left(\sum_{\mu \in \text{OFDM}} \left(K(i, \mu) \cdot A_\mu - K(i, \mu) \cdot A \cdot \sum_{l=0}^{M-1} K(l, \mu) \cdot \alpha_l \right) \right) \quad (29)$$

Dies führt schließlich auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 0 = 2A \cdot \left(\sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot A_\mu \right) \quad (30)$$

$$-2A^2 \cdot \left(\sum_{l=0}^{M-1} \left(\sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot K(l, \mu) \right) \cdot \alpha_l \right)$$

1.2 Lösung des linearen Gleichungssystems

Gleichung 31 beschreibt ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\sum_{l=0}^{M-1} g_{il} \alpha_l + h_i = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, M-1 \quad (31)$$

Dabei gilt:

$$h_i = 2A \cdot \sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot A_\mu \quad (32)$$

$$g_{il} = -2A^2 \cdot \sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot K(l, \mu) \quad (33)$$

Hierbei muß jedoch folgende Zusatzbedingung beachtet werden:

$$\cos \varphi_l = \alpha_l \quad \Rightarrow \quad |\alpha_l| \leq 1 \quad (34)$$

Um diese Einschränkung zu umgehen, setzt man:

$$A \cdot \cos \varphi_l = A \cdot \alpha_l = \beta_l \quad (35)$$

Hierfür ändert sich das Gleichungssystem dann in:

$$\sum_{l=0}^{M-1} g_{il} \beta_l + h_i = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, M-1 \quad (36)$$

Dabei gilt:

$$h_i = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot A_\mu \quad (37)$$

$$g_{il} = - \sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot K(l, \mu) \quad (38)$$

Die Amplitude A des Zeitsignals ergibt sich dann aus dem betragsmäßig größten Wert für β_l .

Das Gleichungssystem 36 besteht jedoch nicht nur aus linear unabhängigen Gleichungen. Berechnungen haben gezeigt, daß alle Gleichungen paarweise vorhanden sind. Dieser Zusammenhang schreibt sich:

$$g_{il} = g_{M-1-i l} \quad \text{und} \quad h_i = h_{M-1-i} \quad (39)$$

Zunächst wird der Beweis für die rechte Seite des Gleichungssystems geführt. Der Ansatz lautet:

$$\sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) \cdot A_\mu = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(M-1-i, \mu) \cdot A_\mu \quad (40)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{\mu \in \text{OFDM}} K(i, \mu) - K(M-1-i, \mu) = 0 \quad (41)$$

Einsetzen von $K(i, \mu)$ und $K(M-1-i, \mu)$ liefert:

$$\sum_{\mu \in \text{OFDM}} \cos\left(2\pi \frac{\mu}{M} \left(i + \frac{1}{2}\right)\right) - \cos\left(2\pi \frac{\mu}{M} \left(M-i - \frac{1}{2}\right)\right) = 0 \quad (42)$$

Anwendung der Additionstheoreme und Vereinfachung des Ausdrucks führt schließlich auf das Ergebnis:

$$\sum_{\mu \in \text{OFDM}} \overbrace{\sin(\pi\mu)}^{\rightarrow 0 \text{ für } \mu=0,1,2,\dots} \sin\left(\pi \frac{\mu}{M} (2i+1-M)\right) = 0 \quad (43)$$

Für die linke Seite des Gleichungssystems ergibt sich nach kurzer Rechnung der gleiche Zusammenhang.

Es gibt also keine eindeutige Lösung für das Gleichungssystem 36. Vielmehr erhält man einen Lösungsraum, in dem jede Lösung ein lokales Minimum der Kostenfunktion Q darstellt.

2 Ansatz mit einem FM-Signal im komplexen Basisband

2.1 Bestimmung der OFDM-Koeffizienten

Ein FM-moduliertes Signal erfüllt die zu stellende Forderung nach einer konstanten Hüllkurve. Als Ausgangspunkt wird somit ein solches Signal im komplexen Basisband gewählt:

$$\underline{s}(t) = A \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot r_T(t) \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = \sum_{i=0}^{M-1} \varphi_i \cdot r_{\frac{T}{M}} \left(t - i \frac{T}{M} \right) \quad (44)$$

Zur leichten Auswertung des Ausdrucks wurde der Gesamtphasenwinkel $\varphi(t)$ als stückweise konstant definiert. Dieses Signal wird durch eine Fourier-Reihenentwicklung nach den OFDM-Trägerfrequenzen dargestellt:

$$\underline{s}(t) = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} \underline{c}_\mu \cdot e^{j\mu\Delta\omega t} + \overbrace{\sum_{\mu \ni \text{OFDM}} \underline{c}_\mu \cdot e^{j\mu\Delta\omega t}}^{\text{Restglied=Approximationsfehler}} \quad (45)$$

In ausführlicher Schreibweise ergibt sich dafür:

$$\underline{s}(t) = \sum_{\mu} (a_\mu + jb_\mu) \cdot (\cos(\mu\Delta\omega t) + j \sin(\mu\Delta\omega t)) \quad (46)$$

Trennung nach Realanteil und Imaginäranteil:

$$\underline{s}(t) = x(t) + jy(t) \quad (47)$$

$$\Re \quad x(t) = \sum_{\mu} a_\mu \cos(\mu\Delta\omega t) - b_\mu \sin(\mu\Delta\omega t) \quad (48)$$

$$\Im \quad y(t) = \sum_{\mu} a_\mu \sin(\mu\Delta\omega t) + b_\mu \cos(\mu\Delta\omega t) \quad (49)$$

Für die komplexen Fourier-Koeffizienten gilt:

$$\underline{c}_\mu = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \underline{s}(t) \cdot e^{-j\mu\Delta\omega t} dt \quad (50)$$

Einsetzen von $\underline{s}(t)$ in die Gleichung zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\underline{c}_\mu = \frac{A}{T} \cdot \int_0^T e^{j \sum_{i=0}^{M-1} \varphi_i \cdot r_{\frac{T}{M}} \left(t - i \frac{T}{M} \right)} \cdot e^{-j\mu\Delta\omega t} dt \quad (51)$$

Vertauschen von Integration und Summation sowie Auswerten der Rechteckfunktion liefert:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \int_{i \frac{T}{M}}^{(i+1) \frac{T}{M}} e^{j\varphi_i} \cdot e^{-j\mu\Delta\omega t} dt \quad (52)$$

Auswerten des Integrals:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} e^{j\varphi_i} \cdot \left[\frac{1}{-j\mu\Delta\omega} e^{-j\mu\Delta\omega t} \right]_{i \frac{T}{M}}^{(i+1) \frac{T}{M}} \quad (53)$$

Einsetzen der Grenzen liefert:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} e^{j\varphi_i} \cdot \frac{e^{-j\mu\Delta\omega(i+1) \frac{T}{M}} - e^{-j\mu\Delta\omega i \frac{T}{M}}}{-j\mu\Delta\omega} \quad (54)$$

Mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgt:

$$c_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \overbrace{e^{j\varphi_i}}^{\Phi_i} \cdot \frac{\overbrace{e^{-j\mu 2\pi \frac{i+1}{M}} - e^{-j\mu 2\pi \frac{i}{M}}}^{K(i, \mu)}}{-j\mu 2\pi} \quad (55)$$

Dies führt auf das Gleichungssystem:

$$c_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \Phi_i \cdot K(i, \mu) \quad (56)$$

Aufspalten von $K(i, \mu)$ nach Realanteil und Imaginäranteil:

$$K(i, \mu) = K_R(i, \mu) + jK_I(i, \mu) \quad (57)$$

$$\Re \quad K_R(i, \mu) = \frac{1}{\mu\pi} \cdot \sin\left(\frac{\mu\pi}{M}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu\pi}{M} \cdot (2i+1)\right) \quad (58)$$

$$\Im \quad K_I(i, \mu) = \frac{-1}{\mu\pi} \cdot \sin\left(\frac{\mu\pi}{M}\right) \cdot \sin\left(\frac{\mu\pi}{M} \cdot (2i+1)\right) \quad (59)$$

Mit den Formeln:

$$\underline{c}_\mu = a_\mu + j b_\mu \quad (60)$$

$$\Phi_i = \cos \varphi_i + j \sin \varphi_i \quad (61)$$

ergibt sich folgendes nichtlineares Gleichungssystem:

$$\Re \quad a_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} K_R(i, \mu) \cos \varphi_i - K_I(i, \mu) \sin \varphi_i \quad \forall \mu \quad (62)$$

$$\Im \quad b_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} K_R(i, \mu) \sin \varphi_i + K_I(i, \mu) \cos \varphi_i \quad \forall \mu \quad (63)$$

Gleichung 58 und 59 sind für $\mu = 0$ nicht definiert. Die Grenzwertberechnung nach L'Hospital liefert:

$$\Re \quad K_R(i, \mu)|_{\mu=0} = \frac{1}{M} \quad (64)$$

$$\Im \quad K_I(i, \mu)|_{\mu=0} = 0$$

Bei der Wahl der Anzahl der Winkelintervalle M und der OFDM-Träger N_T ist zu beachten, daß a_μ und b_μ für $\mu = n \cdot M$ den Wert Null annehmen.

2.2 Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

Gibt man sich die Werte für die Normalkomponente a_μ , als die informations-tragenden Koeffizienten vor, so muß folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$f_\mu(\varphi) = \left(A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} K_R(i, \mu) \cos \varphi_i - K_I(i, \mu) \sin \varphi_i \right) - a_\mu = 0 \quad \forall \mu \quad (65)$$

Die aus der Lösung dieses Gleichungssystems ermittelten Werte für φ_i werden in Gleichung 63 eingesetzt und damit die Quadraturkomponente b_μ zur Stabilisierung der Hüllkurve ermittelt.

Das nichtlineare Gleichungssystem 65 kann nur mit einem iterativen Verfahren gelöst werden. Wenn die Anzahl der Unbekannten φ_i nicht mit der Anzahl der Gleichungen f_μ übereinstimmt, wird die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems jedoch sehr unübersichtlich. Daher wird die Bedingung eingeführt, daß M gleich der Anzahl der OFDM-Träger gewählt wird. Mit den entsprechenden OFDM-Trägerfrequenzen hat das nichtlineare Gleichungssystem dann folgende Form:

$$\begin{aligned}
f_0 & (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M-3}, \varphi_{M-2}, \varphi_{M-1}) = 0 \\
f_1 & (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M-3}, \varphi_{M-2}, \varphi_{M-1}) = 0 \\
f_2 & (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M-3}, \varphi_{M-2}, \varphi_{M-1}) = 0 \\
& \vdots \\
f_{N_T-2} & (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M-3}, \varphi_{M-2}, \varphi_{M-1}) = 0 \\
f_{N_T-1} & (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M-3}, \varphi_{M-2}, \varphi_{M-1}) = 0 \\
f_{N_T} & (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M-3}, \varphi_{M-2}, \varphi_{M-1}) = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

Die mindestens notwendige Anzahl M der Unbekannten φ_i berechnet sich dann aus der Anzahl der OFDM-Träger N_T zu:

$$M = N_T + 1 \tag{67}$$

Zur iterativen Lösung großer nichtlinearer Gleichungssysteme gibt es mehrere verschiedene Methoden.

2.2.1 Das SOR-Newton-Verfahren

Die Methode der Überrelaxation (successive overrelaxation = SOR) stellt eine Modifikation des Newton-Verfahrens dar.

Zur Korrektur der i -ten Komponente $\varphi_i^{(k)}$ wird ein geeignet gewählter Relaxationsfaktor $\omega \in (0, 2)$ multipliziert. Das SOR-Newton-Verfahren lautet:

$$\varphi_i^{(k+1)} = \varphi_i^{(k)} - \omega \cdot \left(\frac{f_i \left(\varphi_0^{(k+1)}, \dots, \varphi_{i-1}^{(k+1)}, \varphi_i^{(k)}, \dots, \varphi_{M-1}^{(k)} \right)}{\frac{\partial f_i \left(\varphi_0^{(k+1)}, \dots, \varphi_{i-1}^{(k+1)}, \varphi_i^{(k)}, \dots, \varphi_{M-1}^{(k)} \right)}{\partial \varphi_i}} \right) \tag{68}$$

für $i = 0, \dots, M - 1$. Die Auswertung der partiellen Ableitung liefert:

$$\varphi_i^{(k+1)} = \varphi_i^{(k)} + \omega \cdot \left(\frac{f_i \left(\varphi_0^{(k+1)}, \dots, \varphi_{i-1}^{(k+1)}, \varphi_i^{(k)}, \dots, \varphi_{M-1}^{(k)} \right)}{A \cdot (K_R(i, i) \sin \varphi_i + K_I(i, i) \cos \varphi_i)} \right) \tag{69}$$

2.2.2 Der Great Deluge Algorithm (GDA)

Zur Lösung von großen nichtlinearen Gleichungssystemen bieten sich auch heuristische Verfahren an. Die Kostenfunktion Q sei ein Maß für die Güte des Lösungsvektors $\vec{\varphi}$.

$$Q(\varphi_i) = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} |A_\mu - a_\mu| \quad (70)$$

Daraus wird mit Gleichung 62 und 67:

$$Q(\varphi_i) = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} \left| A_\mu - \left(A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} K_R(i, \mu) \cos \varphi_i - K_I(i, \mu) \sin \varphi_i \right) \right| \quad (71)$$

Ziel des GDA ist es nun den größten Wert der Kostenfunktion $-Q$ zu ermitteln. Diese Kostenfunktion stellt bildlich gesehen eine fiktive N_T -dimensionale Landschaft mit Bergen und Tälern dar. Der Vektor $\vec{\varphi}$ beschreibt dabei einen Ort mit einer gewissen Höhe, der Lösungsgüte. Durch schrittweises ändern der einzelnen Vektorkomponenten wandert der GDA in dem Lösungsgebiet umher. Gleichzeitig beginnt es in dieser imaginären Welt zu regnen. Der GDA akzeptiert dabei jeden Schritt sofern die neue Position nicht unter der stetig steigenden Wasserlinie liegt. Im Gegensatz zu anderen heuristischen Verfahren bietet der GDA bei der Suche nach dem globalen Maximum von $-Q$ genügend Freiraum um nicht in einem lokalen Optimum gefangen zu werden. Das nachfolgende Struktogramm beschreibt die Vorgehensweise des GDA bei der Optimierung.

SET	Startphasen $\{\varphi_n\}$ und Phasenschrittweite $\{\Delta\varphi_n\} \leq \pi$
SET	Minimale Phasenschrittweite $MP > 0$ und Phasen Divisor $PD > 1$
SET	“Regen Stärke” $RS > 0$ und “Wasser Linie”: $WL = -Q$
WHILE	$ \{\Delta\varphi_n\} > MP$
	$TS = 0$ (Trockene Schritte)
	FOR $i = 1$ TO $i = N_T$
	$\varphi_i = \varphi_i + \Delta\varphi_i$
	IF $-Q < WL$
	THEN $\Delta\varphi_i = -\Delta\varphi_i$ (Invertieren der Schrittichtung)
	$\varphi_i = \varphi_i + \Delta\varphi_i$ (Zurück zur alten Position)
	ELSE $WL = WL + RS$ (Anheben der “Wasser Linie”)
	$TS = TS + 1$
	IF $TS = 0$
	THEN $SD = SD + 1$ (Schlechter Durchlauf)
	IF $SD = 2$ (Phasenschrittweite verringern)
	THEN FOR $i = 1$ TO $i = N_T$
	$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i / PD$
	$SD = 0$
	ELSE $SD = 0$

GDA zur Optimierung der Kostenfunktion $-Q$

2.3 Linearisierung des Gleichungssystems

Zur einfacheren Behandlung des nichtlinearen Gleichungssystems wird eine Linearisierung durchgeführt. Für die trigonometrischen Funktionen setzt man:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_i &= C_i \\ \sin \varphi_i &= S_i\end{aligned}\quad (72)$$

mit der Nebenbedingung:

$$C_i^2 + S_i^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |C_i| \leq 1 \quad \text{und} \quad |S_i| \leq 1 \quad (73)$$

Damit folgt für das linearisierte Gleichungssystem:

$$\Re \quad a_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} K_R(i, \mu) \cdot C_i - K_I(i, \mu) \cdot S_i \quad \forall \mu \quad (74)$$

$$\Im \quad b_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} K_R(i, \mu) \cdot S_i + K_I(i, \mu) \cdot C_i \quad \forall \mu \quad (75)$$

Mit den A_μ als vorgegebenen Koeffizienten und der Nebenbedingung aus Gleichung 73 kann folgende Kostenfunktion angegeben werden:

$$Q(C_i, S_i) = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} (A_\mu - a_\mu)^2 + \overbrace{\sum_{i=0}^{M-1} (C_i^2 + S_i^2 - 1)^{2n}}^{\text{Nebenbedingung}} \quad (76)$$

Mit Gleichung 74 wird dies zu:

$$Q(C_i, S_i) = \sum_{\mu \in \text{OFDM}} \left(A_\mu - \overbrace{\left(A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} K_R(i, \mu) \cdot C_i - K_I(i, \mu) \cdot S_i \right)}^{a_\mu} \right)^2 + \underbrace{\sum_{i=0}^{M-1} (C_i^2 + S_i^2 - 1)^{2n}}_{\text{Nebenbedingung}} \quad (77)$$

Diese Kostenfunktion muß nun in C_i und S_i minimiert werden:

$$Q(C_i, S_i) \rightarrow \min \quad (78)$$

Hierzu muß folgender Ansatz erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial C_i}(C_i, S_i) &= 0 \quad \forall i \\ \frac{\partial Q}{\partial S_i}(C_i, S_i) &= 0 \quad \forall i \end{aligned} \quad (79)$$

2.4 Beispiel zum FM-Signal im komplexen Basisband

Folgendes Beispiel zeigt ein OFDM-Signal mit 17 Trägern vor und nach der Korrektur durch das Gleichungssystem aus 62 und 63.

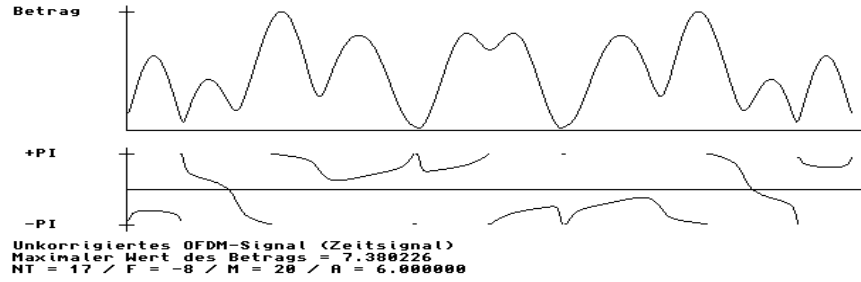


Abbildung 1: Unkorrigiertes OFDM-Signal

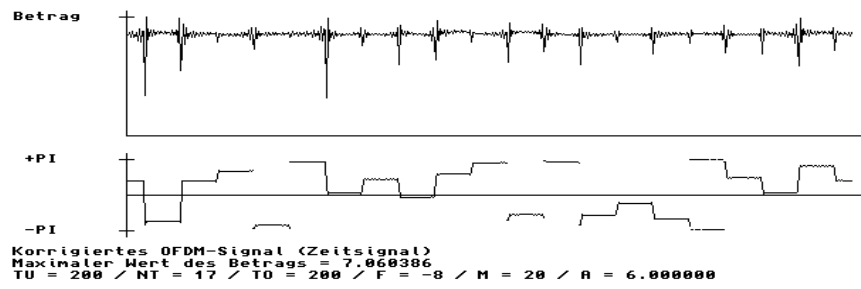


Abbildung 2: Korrigiertes OFDM-Signal

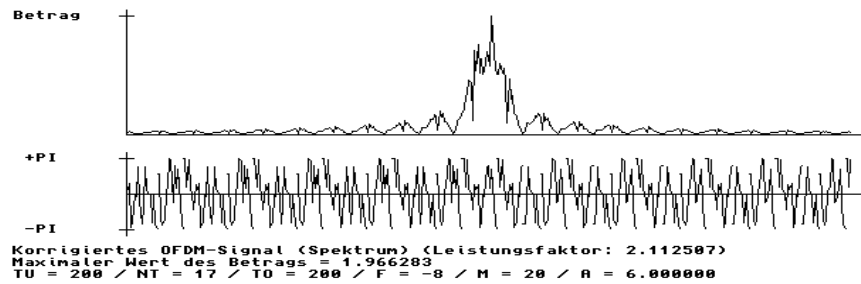


Abbildung 3: Frequenzgang des korrigierten OFDM-Signals

3 Ansatz mit einem FM-Signal bei stetigem Phasenverlauf

3.1 Bestimmung der OFDM-Koeffizienten

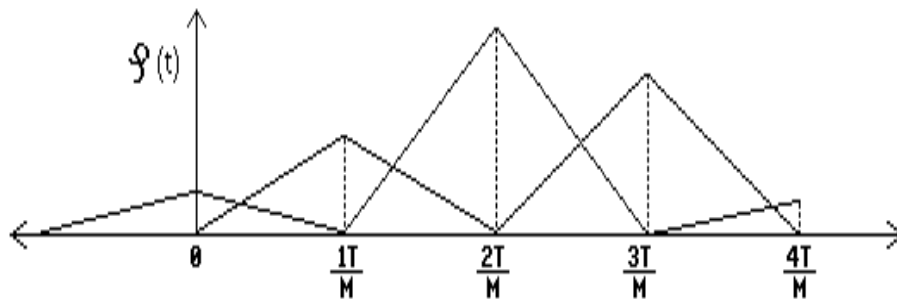


Abbildung 4: Ansatz zu einem stetigen Phasenverlauf

Zur Vermeidung von Sprungstellen im Phasenverlauf $\varphi(t)$ wird folgender Ansatz gewählt:

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{M-1} \underbrace{\left(\varphi_i \left(1 - \left(t - i \frac{T}{M} \right) \frac{M}{T} \right) + \varphi_{i+1} \left(\left(t - i \frac{T}{M} \right) \frac{M}{T} \right) \right)}_{\text{Winkelfunktion des } i\text{-ten Intervalls}} \cdot r \frac{T}{M} \left(t - i \frac{T}{M} \right) \quad (80)$$

Die Zeitfunktion im komplexen Basisband lautet:

$$\underline{s}(t) = A \cdot e^{j\varphi(t)} \quad (81)$$

Daraus folgt für die komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$c_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} e^{j(\varphi_i - i\varphi_i - i\varphi_{i+1})} \left(\frac{e^{j(M\varphi_{i+1} - M\varphi_i - 2\pi\mu)\frac{(i+1)}{M}} - e^{j(M\varphi_{i+1} - M\varphi_i - 2\pi\mu)\frac{i}{M}}}{j(M\varphi_{i+1} - M\varphi_i - 2\pi\mu)} \right) \quad (82)$$

Aufspalten nach Realanteil und Imaginäranteil:

$$a_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\cos \Psi_i (\sin \Phi_i \frac{i+1}{M} - \sin \Phi_i \frac{i}{M}) + \sin \Psi_i (\cos \Phi_i \frac{i+1}{M} - \cos \Phi_i \frac{i}{M})}{\Phi_i} \quad (83)$$

$$b_\mu = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\cos \Psi_i (\cos \Phi_i \frac{i}{M} - \cos \Phi_i \frac{i+1}{M}) + \sin \Psi_i (\sin \Phi_i \frac{i+1}{M} - \sin \Phi_i \frac{i}{M})}{\Phi_i} \quad (84)$$

Mit den Formeln:

$$\underline{c}_\mu = a_\mu + j b_\mu \quad (85)$$

$$\Phi_i = M\varphi_{i+1} - M\varphi_i - 2\pi\mu \quad (86)$$

$$\Psi_i = \varphi_i - i\varphi_{i+1} - i\varphi_i \quad (87)$$

Diese Gleichungssystem läßt sich nur mit heuristischen Verfahren, unter hohem Rechenaufwand lösen.

3.2 Beispiel zum FM-Signal mit stetigem Phasenverlauf

Folgendes Beispiel zeigt ein OFDM-Signal vor und nach der Korrektur durch das Gleichungssystem aus 83 und 84.

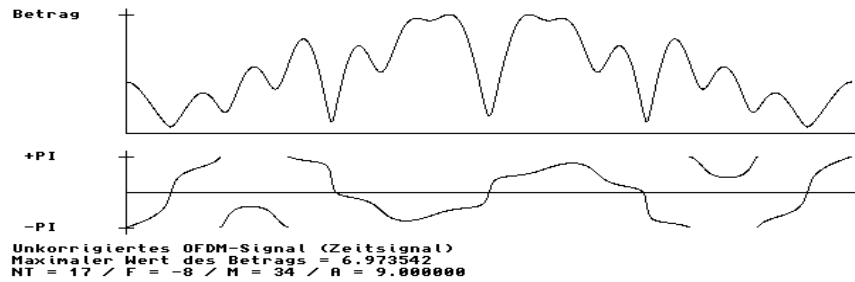


Abbildung 5: Unkorrigiertes OFDM-Signal

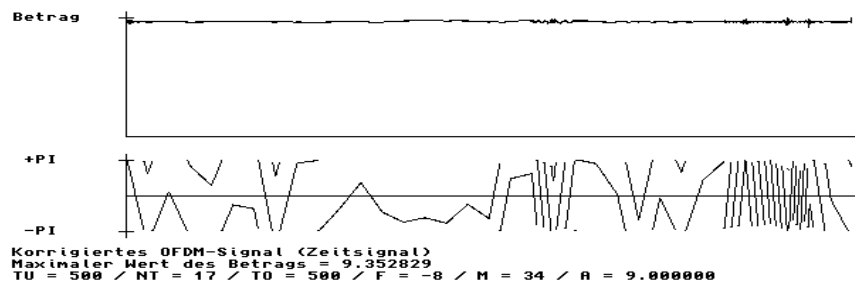


Abbildung 6: Korrigiertes OFDM-Signal

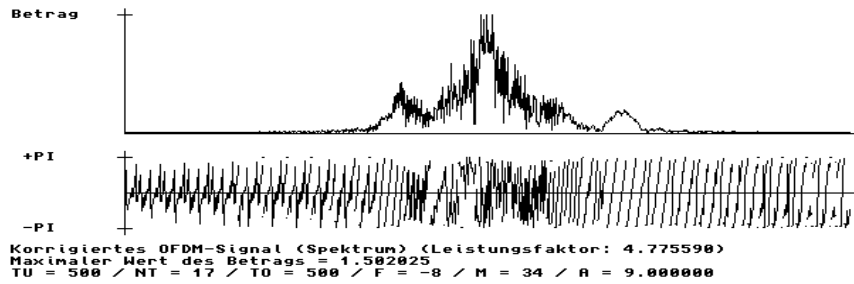


Abbildung 7: Frequenzgang des korrigierten OFDM-Signals

4 Ansatz mit einem abgetasteten FM-Signal

4.1 Bestimmung der OFDM-Koeffizienten

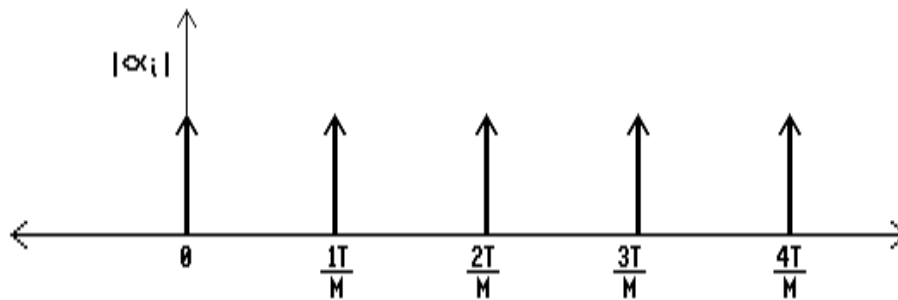


Abbildung 8: Abgetastetes Basisbandsignal mit konstanter Hüllkurve

Die abgetastete Zeitfunktion im komplexen Basisband lautet:

$$\underline{s}(t) = A \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \delta\left(t - i \frac{T}{M}\right) \quad \text{mit} \quad |\alpha_i| = 1 \quad (88)$$

Für die komplexen Fourier-Koeffizienten gilt:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \int_0^T \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \delta\left(t - i \frac{T}{M}\right) \cdot e^{-j\mu\Delta\omega t} dt \quad (89)$$

Integration des Ausdrucks führt auf:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot e^{-j\mu\Delta\omega \frac{iT}{M}} \quad (90)$$

Mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgt:

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cdot e^{-j\mu 2\pi \frac{i}{M}} \quad (91)$$

Mit $\alpha_i = \alpha_i + j\beta_i$ und der Bedingung $|\alpha_i| = 1$ folgt $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$.

$$c_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} (\alpha_i + j\beta_i) \cdot \left(\cos(\mu 2\pi \frac{i}{M}) - j \sin(\mu 2\pi \frac{i}{M}) \right) \quad (92)$$

Aufspalten nach Realanteil und Imaginäranteil:

$$a_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \cos(\mu 2\pi \frac{i}{M}) + \beta_i \sin(\mu 2\pi \frac{i}{M}) \quad (93)$$

$$b_\mu = \frac{-A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \sin(\mu 2\pi \frac{i}{M}) - \beta_i \cos(\mu 2\pi \frac{i}{M}) \quad (94)$$

Allgemein gilt die Beziehung:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x + \arctan \frac{a}{b} \right) \quad (95)$$

Daraus folgt mit der Vorgabe $\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} = 1$:

$$a_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \sin(\mu 2\pi \frac{i}{M} + \varphi_i) \quad (96)$$

Die Winkel φ_i können beliebige Werte annehmen. Die Gleichungen für a_μ und b_μ lauten somit:

$$a_\mu = \frac{A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \cos \varphi_i \sin(\mu 2\pi \frac{i}{M}) + \sin \varphi_i \cos(\mu 2\pi \frac{i}{M}) \quad (97)$$

$$b_\mu = \frac{-A}{T} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \sin \varphi_i \sin(\mu 2\pi \frac{i}{M}) - \cos \varphi_i \cos(\mu 2\pi \frac{i}{M}) \quad (98)$$

4.2 Beispiel zum abgetasteten FM-Signal

Folgendes Beispiel zeigt ein OFDM-Signal vor und nach der Korrektur durch das Gleichungssystem aus 97 und 98.

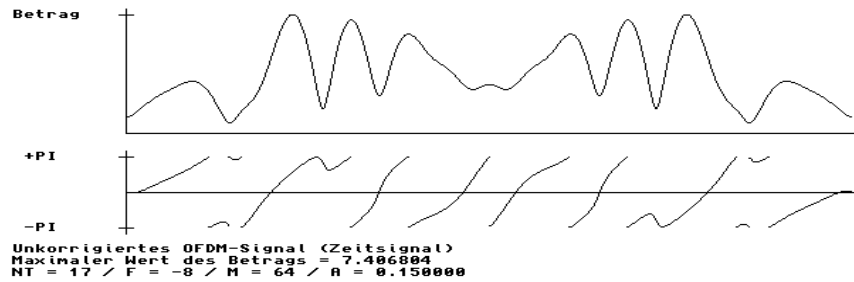


Abbildung 9: Unkorrigiertes OFDM-Signal

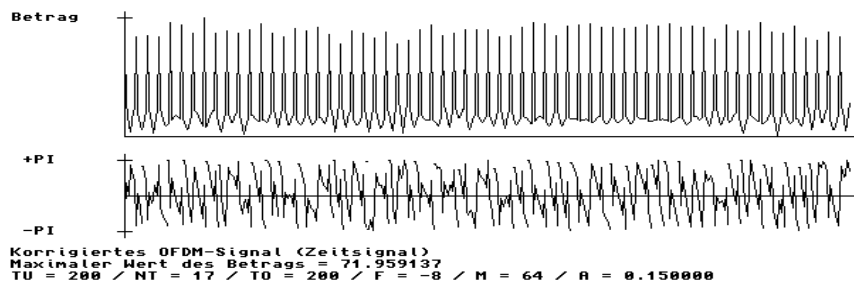


Abbildung 10: Korrigiertes OFDM-Signal

Nach einer geeigneten Tiefpassfilterung ergibt sich für die korrigierte Hüllkurve und für den Frequenzgang.

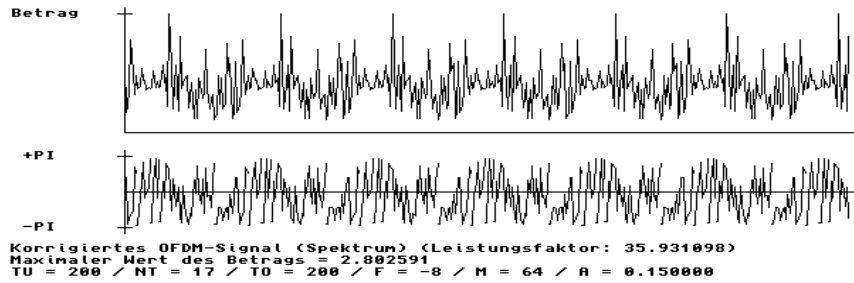


Abbildung 11: Frequenzgang des korrigierten OFDM-Signals

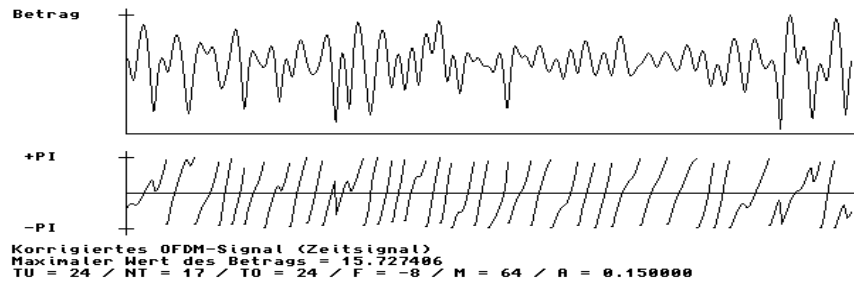


Abbildung 12: Korrigiertes OFDM-Signal (TP)

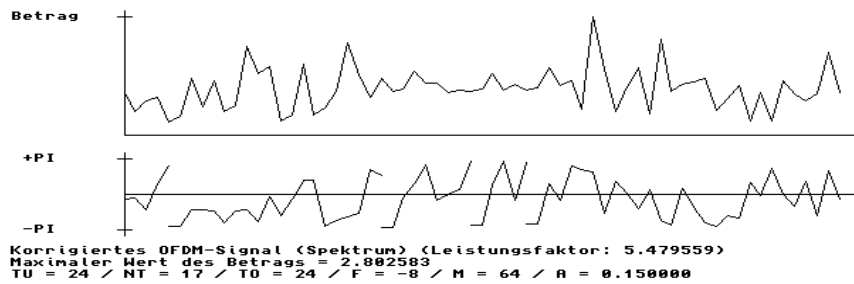


Abbildung 13: Frequenzgang des korrigierten OFDM-Signals (TP)